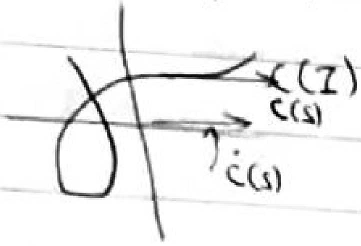
Πέμπτη 17/10/2019

ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

<u>με παράμετρο μήκος τόξου</u>

$c: I \to \mathbb{R}^2$, $s \in I$ $\quad C^2$ - καμπύλη



$c(s) = (x(s), y(s))$

$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$ $\quad \|\dot{c}(s)\| = 1 \Leftrightarrow \dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = 1$

$\exists\, \varphi: I \to \mathbb{R}$ C^1 ώστε

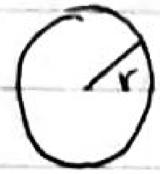
$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \cos\varphi(s) \\ \dot{y}(s) = \sin\varphi(s) \end{cases}$$

$\kappa: I \to \mathbb{R}$, C^2

$\kappa(s) = \dot{\varphi}(s)$

<u>Υπολογισμός</u>: $\kappa = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle$

$\kappa = 0$



$c(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$

$\kappa = \frac{1}{r}$

$\tilde{c} = T \circ c \Rightarrow \tilde{\kappa} = \varepsilon\kappa$ όπου $\varepsilon = \begin{cases} +1 & T \text{ διατ. προσανατολισμό} \\ -1 & T \text{ αντ. προσανατολισμό} \end{cases}$

Θεωρώ την καμπύλη $\tilde{c} = c\circ f$, $f(s) = -s$

$\tilde{s} = -s$ $\quad \frac{dc}{d\tilde{s}} = \frac{ds}{d\tilde{s}}\frac{dc}{ds} \Rightarrow \frac{dc}{d\tilde{s}} = -\dot{c}$

$\Rightarrow \left\|\frac{dc}{d\tilde{s}}\right\| = 1 \Rightarrow \tilde{s}$ μήκος τόξου.

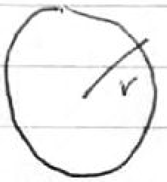
$\tilde{k} = \langle \ddot{\tilde{c}}, J\dot{\tilde{c}}\rangle$

$\dot{\tilde{c}} = -\dot{c}$

$\ddot{\tilde{c}} = \frac{d\dot{\tilde{c}}}{d\tilde{s}} = \frac{ds}{d\tilde{s}}\frac{d\dot{\tilde{c}}}{ds} \Rightarrow \ddot{\tilde{c}} = +\ddot{c}$

$\tilde{k} = \langle \ddot{c}, -J\dot{c}\rangle = -\langle \ddot{c}, J\dot{c}\rangle$

$\tilde{k} = -k$



$c(s) = (r\cos\frac{s}{r}, -r\sin\frac{s}{r})$

$k = -\frac{1}{r}$

ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ $\mathbb{R}^2$ ΜΕ ΤΥΧΟΥΣΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

Έστω $c: I\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κανονική C^2-καμπύλη με παράμετρο $t\in I$. Θεωρώ την αναπαραμέτριση της c με παράμετρο το μήκος τόξου. $s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\|du \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \|c'\| > 0 \Rightarrow$

$s = s(t) \Leftrightarrow t = t(s) = f(s)$, $\frac{df}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|c'\|}$

Η $\tilde{c} = c\circ f$ έχει παράμετρο μήκος τόξου και καμπυλότητα $\tilde{k} = \langle \ddot{\tilde{c}}, J\dot{\tilde{c}}\rangle$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ονομάζουμε καμπυλότητα της C^2 κανονικής καμπύλης $c: I\to\mathbb{R}^2$ την συνάρτηση $k: I\to\mathbb{R}$ με $k(t) = \tilde{k}(s(t))$ ή $k = \tilde{k}\circ s$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΜΕ ΤΥΧΟΥΣΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

$\langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle$

$$\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dc}{dt} \Rightarrow \dot{c} = \frac{dt}{ds} c'$$

$$\ddot{c} = \frac{d\dot{c}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}c'\right) = \frac{d^2t}{ds^2}c' + \frac{dt}{ds}\frac{dc'}{ds}$$

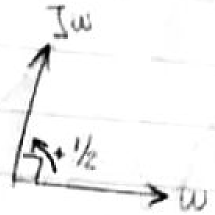
$$= \frac{d^2t}{ds^2}c' + \frac{dt}{ds}\frac{dt}{ds}\frac{dc'}{dt} \Rightarrow \ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2}c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c'', \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|c'\|}$$

$$\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2}c' + \frac{1}{\|c'\|^2}c''$$

$$K = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle = \left\langle \frac{d^2t}{ds^2}c' + \frac{1}{\|c'\|^2}c'', J\left(\frac{1}{\|c'\|}c'\right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{d^2t}{ds^2}c', \frac{1}{\|c'\|}Jc' \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\|c'\|^2}c'', \frac{1}{\|c'\|}Jc' \right\rangle$$

$$= \frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{\|c'\|}\underbrace{\langle c', Jc' \rangle}_{=0} + \frac{\langle c'', Jc' \rangle}{\|c'\|^3}$$



<u>Πρόταση</u> $K = \frac{\langle c'', Jc' \rangle}{\|c'\|^3}$

Επιπλέον αν $c(t) = (x(t), y(t))$

$c'(t) = (x'(t), y'(t))$ $\quad Jc'(t) = (-y'(t), x'(t))$

$c''(t) = (x''(t), y''(t))$, $\quad K = \dfrac{x'y'' - y'x''}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}^{\,3}}$

<u>Παράδειγμα</u> Θεωρώ την καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\underbrace{a\cos t}_{x(t)}, \underbrace{b\sin t}_{y(t)})$, $t \in \mathbb{R}$

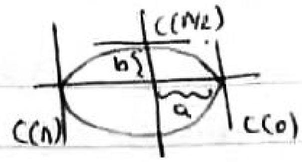
$a, b > 0$

$x'(t) = -a\sin t$, $\quad x''(t) = -a\cos t$

$y'(t) = b\cos t$ $\quad y''(t) = -b\sin t$

$x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) = ab\sin^2 t + ab\cos^2 t = ab$

$$k(t)=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}^{\,3}}$$



ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Έστω $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση. Το γράφημα της f είναι η $c: I\to\mathbb{R}^2$ με $c(t)=(t,f(t))$

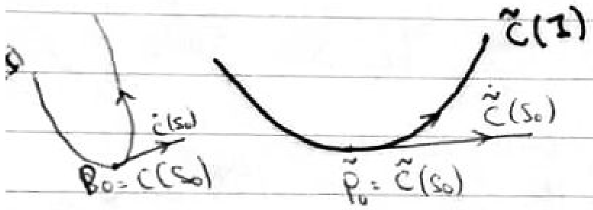
$x(t)=t$, $y(t)=f(t)$

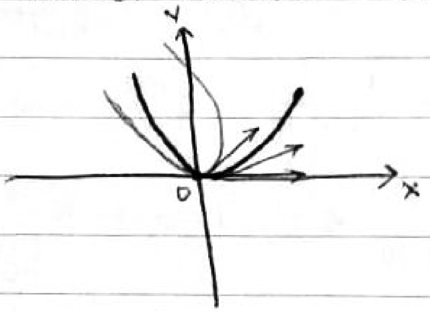
$x'(t)=1$, $x''(t)=0$

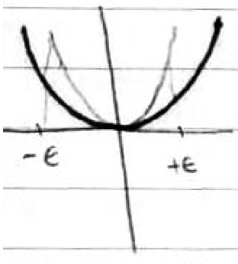
$y'(t)=f'(t)$, $y''(t)=f''(t)$

$$k(t)=\frac{f''(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}^{\,3}}$$

Έστω καμπύλες $c,\tilde{c}: I\to\mathbb{R}^2$ καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ αμφότερες με φυσική παράμετρο $s\in I$ και καμπυλότητες $k,\bar{k}: I\to\mathbb{R}$ αντίστοιχα. Υποθέτω ότι για κάποιο $s_0\in I$ ισχύει $k(s_0)>\bar{k}(s_0)$







$c(s_0)=(0,0)=\tilde{c}(s_0)$ με παραλ μεταφ.

$\dot{c}(s_0)=(1,0)=\dot{\tilde{c}}(s_0)$ με στροφή

Κοντά στο $(0,0)$ οι καμπύλες είναι γραφήματα ως προς Ox

$c(t)=(t,f(t))$, $\tilde{c}(t)=(t,\tilde{f}(t))$, $t\in(-\epsilon,\epsilon)$

$f(0)=0=\tilde{f}(0)$

$c'(0)=(1,f'(0))$ $\qquad \tilde{c}'(0)=(1,\tilde{f}'(0))$

$f'(0)=0=\tilde{f}'(0)$ $\qquad$ Το μηδέν είναι κρίσιμο σημείο

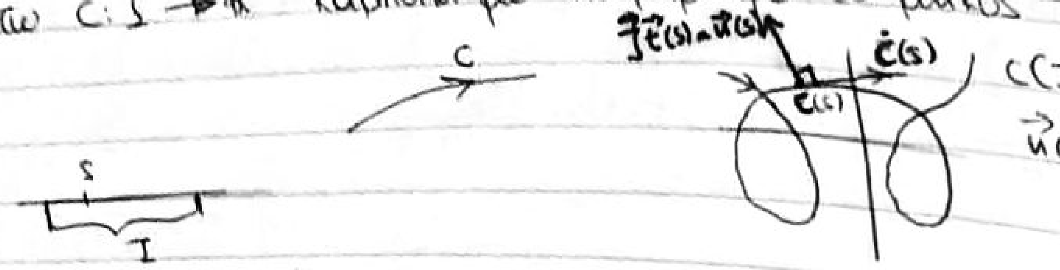
έχω $k(0)>\tilde{k}(0) \Leftrightarrow f''(0)>\tilde{f}''(0)$

$g=f-\tilde{f}$ $\qquad$ Η g έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο

$g(0)=0,\ g'(0)=0,\ g''(0)>0$ $\qquad$ 0. Δηλαδή $t\in(-\epsilon,\epsilon)-\{0\}\Rightarrow g(t)>g(0)=0$

$f(t)>\tilde{f}(t)$

Έστω $c: I \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$



$\vec{n}(s) = (-\dot y(s), \dot x(s))$

$c(s) = (x(s), y(s))$

$\dot c(s) = (\dot x(s), \dot y(s)) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)) = \vec{t}(s)$

$\kappa(s) = \dot\varphi(s)$

$\vec{t}(s) = \dot c(s)$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της c στο $s \in I$
Το διάνυσμα $\vec{n}(s) = J\vec{t}(s)$ καλείται μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της c στο s. $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}$ ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^2$ καλείται πλαίσιο Frenet

$\dot{\vec{t}} = (-\dot\varphi \sin\phi, \dot\varphi\cos\phi) = \dot\varphi(-\sin\phi, \cos\phi) = \kappa(-\dot y, \dot x)$

$\boxed{\dot{\vec{t}} = \kappa \cdot \vec{n}}$ $1^{ος}$ τύπος Frenet

$\boxed{\dot{\vec{n}} = -\kappa \vec{t}}$ $2^{ος}$ τύπος Fernet

$\dot{\vec{t}} = \langle \dot{\vec{t}}, \vec{t} \rangle \vec{t} + \langle \dot{\vec{t}}, \vec{n} \rangle \vec{n}$

$V, W : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ διαφ.

$\langle V, W \rangle' = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle$

$V = (V_1, \dots, V_n)$, $W = (W_1, \dots, W_n)$

$\langle V, W \rangle = \sum_{i=1}^{n} V_i W_i$, $\langle V, W \rangle' = \sum_{i=1}^{n} V_i' W_i + \sum V_i W_i' = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle$

$\langle \dot{\vec{t}}, \vec{t} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle)' = 0$

$\dot{\vec{n}} = \langle \dot{\vec{n}}, \vec{t} \rangle \vec{t} + \langle \dot{\vec{n}}, \vec{n} \rangle \vec{n}$, $\langle \dot{\vec{n}}, \vec{n} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle)' = 0$

, $\langle \dot{\vec{n}}, \vec{t} \rangle = (\langle \vec{n}, \vec{t} \rangle)' - \langle \vec{n}, \dot{\vec{t}} \rangle = -\langle \vec{n}, \dot{\vec{t}} \rangle = -\kappa$

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{t}} \\ \dot{\vec{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \end{pmatrix}$$

ΠΛΑΙΣΙΟ FRENET ΣΕ ΤΥΧΟΥΣΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

$$\vec t(t)=\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|},\qquad \vec n(t)=J\vec t(t)=\frac{Jc'(t)}{\|c'(t)\|}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ $\mathbb{R}^2$.

<u>ΥΠΑΡΞΗ</u> Δοθείσας τυχούσας συνεχούς συνάρτησης $k: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $k(s)$, $s\in I$ υπάρχει καμπύλη $c(s)$ με παράμετρο μήκος τόξου $s\in I$ και καμπυλότητα k

<u>ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ</u> Αν $c,\tilde c: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ αμφότερες με παράμετρο το μήκος τόξου $s\in I$ και ίσες καμπυλότητες $k,\tilde k: I\to\mathbb{R}$ (δηλ. $k(s)=\tilde k(s)\ \forall s\in I$) τότε είναι γεωμ. ισότιμες
$\tilde c = T\circ c$, $T\in Isom(\mathbb{R}^2)$ $T=T_u\circ A$, A= στροφή

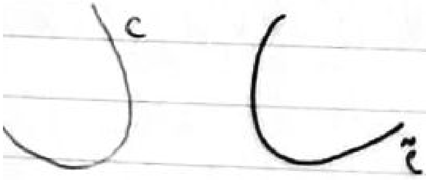
<u>Απόδειξη:</u>

<u>ΥΠΑΡΞΗ</u> Θεωρώ $s_0\in I$ και ορίζω τη συνάρτηση $\varphi(s)=\int_{s_0}^s k(u)du$ και την καμπύλη $c: I\to\mathbb{R}^2$ με $c(s)=\left(\int_{s_0}^s\cos\varphi(u)du, \int_{s_0}^s \sin\varphi(u)du\right)$

$$c(s)=\left(\int_{s_0}^s \cos\left(\int_{s_0}^u k(v)dv\right)du, \int_{s_0}^s \sin\left(\int_{s_0}^u k(v)dv\right)du\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dc(s)}{ds}=\left(\cos\left(\int_{s_0}^s k(u)du\right), \sin(\dots)\right)\Rightarrow \left\|\frac{dc(s)}{ds}\right\|=1\ \forall s \Rightarrow s= \text{μήκος τόξου}$$

<u>ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ:</u>



Θεωρώ $s_0\in I$. Θεωρώ καμπύλη $\bar c = T\circ\tilde c$ $T\in Isom(\mathbb{R}^2)$
$T=T_u\circ A\circ T_w$
$w=-\tilde c(s_0)$, $u=c(s_0)$
και A ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ με $A:\dot{\tilde c}(s_0)=\dot c(s_0)$
s= μήκος τόξου και για την $\bar c$. Η $\bar c$ έχει καμπυλότητα $\bar k=\tilde k=k$
$\bar c(s_0)=T(\tilde c(0))=T_u\circ A(T_w(\tilde c(0)))=T_u\circ A(w+\tilde c(0))=T_u(A(\vec 0))=T_u(\vec 0)=u+0$
$=u=c(s_0)$ Άρα $\bar c(s_0)=c(s_0)$
$\dot{\bar c}(s_0)=A\dot{\tilde c}(s_0)=\dot c(s_0)\Rightarrow \dot{\bar c}(s_0)=\dot c(s_0)\Rightarrow \varphi(s_0)=\bar\varphi(s_0)$
$\dot c(s)=(\cos\varphi(s),\sin\varphi(s))$
$\dot{\bar c}(s)=(\cos\bar\varphi(s),\sin\bar\varphi(s))$

$\tilde{k}(s) = k(s)\ \forall s\in I \Rightarrow \dot{\tilde{\varphi}}(s) = \dot{\varphi}(s)\quad \forall s\in I.$

$\varphi(s) = \tilde{\varphi}(s)\ \forall s \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{\tilde{c}}(s) = \dot{c}(s)\quad \forall s \\ \tilde{c}(s_0) = c(s_0) \end{array}\right] \Rightarrow$

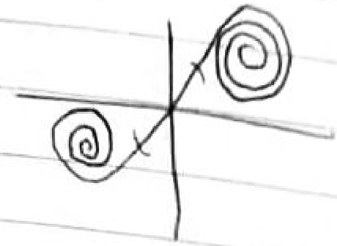
$\Rightarrow \tilde{c}(s) = c(s)\ \forall s$

$\Rightarrow \tilde{c} = c \Rightarrow T\circ\tilde{c} = c$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Οι μόνες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ που έχουν σταθερή καμπυλότητα είναι οι ευθείες (ή ευθύγ. τμήματα) και κύκλοι (ή τόξα κύκλου).

$k(s) = a\cdot s$

$\int k(s)ds = \frac{a}{2}s^2 + \text{σταθ.}$



$\ddot{c} = \dot{\vec{t}} = k\vec{n}$

$\|\ddot{c}\| = k.$

ΑΣΚΗΣΗ: Δίνεται η καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $c(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t)$ είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t, e^t\sin t + e^t\cos t)$
$= e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$.

$\|c'(t)\| = e^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} = \sqrt{2}e^t > 0\ \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow c$ κανονική.

Μήκος τόξου: $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $s(t) = \int_0^t \|c'(u)\|du = \int_0^t \sqrt{2}e^u du =$

$= \sqrt{2}(e^t - 1) \Rightarrow \boxed{s = \sqrt{2}(e^t - 1)} \Leftrightarrow e^t - 1 = \frac{s}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)$, $s > -\sqrt{2}$

Η αναπαραμέτρηση με παράμετρο το μήκος τόξου είναι:

$c(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\cos\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\sin\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)\right).$

$k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}$

$x(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\cos\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)$

$y(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\sin(\dots)$